14 Magnetické pole v různých případech

14.1 VEKTOROVÝ POTENCIÁL

V této kapitole budeme pokračovat v diskuzi o magnetických polích podmíněných stacionárními proudy, což je předmětem magnetostatiky. Magnetické pole souvisí s elektrickými proudy prostřednictvím základních rovnic

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{14.1}$$

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}. \tag{14.2}$$

Chtěli bychom tyto rovnice vyřešit *nejobecnějším* matematickým způsobem, tedy bez požadavku speciální symetrie nebo intuitivního odhadu. V elektrostatice jsme našli přímý způsob určování pole, jsou-li známy polohy všech elektrických nábojů: Vypočte se skalární potenciál φ tak, že se integruje přes všechny náboje jako v rovnici (4.25). Elektrické pole se potom určí tak, že potenciál φ zderivujeme. Ukážeme, že existuje analogický postup určení magnetického pole $\boldsymbol{B}$, v němž je třeba znát proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ všech pohybujících se nábojů.

Viděli jsme, že v elektrostatice lze $\boldsymbol{E}$ vyjádřit jako gradient skalárního pole φ (neboť rotace $\boldsymbol{E}$ byla vždy nulová). Nyní však rotace $\boldsymbol{B}$ *není* vždy nulová, a proto obecně nebude možné vyjádřit $\boldsymbol{B}$ jako gradient. Jenže *divergence* $\boldsymbol{B}$ je vždy nulová, a to znamená, že budeme moci vždy vyjádřit $\boldsymbol{B}$ jako *rotaci* jiného vektorového pole. V článku 2.8 jsme totiž viděli, že divergence rotace je vždy nulová. Pole $\boldsymbol{B}$ můžeme tedy vztáhnout k jinému poli, jež označíme $\boldsymbol{A}$, jako

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{14.3}$$

Zapíšeme-li tento vztah ve složkách, dostaneme

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \boldsymbol{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= (\nabla \times \boldsymbol{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= (\nabla \times \boldsymbol{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Zápis $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ zabezpečuje splnění rovnice (14.1), neboť

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0.$$

Pole $\boldsymbol{A}$ se nazývá *vektorový potenciál*.

Určitě si vzpomínáte, že skalární potenciál φ nebyl definicí určen jednoznačně. Máme-li definováno φ pro daný problém, vždy můžeme najít jiný, stejně dobrý potenciál φ' tím, že přidáme konstantu

$$\varphi' = \varphi + C.$$

Nový potenciál φ' dává totéž elektrické pole, neboť gradient ∇C je roven nule; φ' a φ odpovídají téže fyzikální situaci.

Podobně můžeme mít různé vektorové potenciály $\boldsymbol{A}$, které dávají stejná magnetická pole. Je to opět proto, že $\boldsymbol{B}$ získáme z $\boldsymbol{A}$ derivováním a přidání konstanty k $\boldsymbol{A}$ tedy fyzikální podstatu nezmění. Vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ má však ještě větší volnost. K $\boldsymbol{A}$ můžeme přidat libovolné pole, jež je gradientem nějakého skalárního pole, a fyzika se přitom nezmění. Můžeme to ukázat následujícím způsobem. Mějme vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$, který dává správné magnetické pole $\boldsymbol{B}$ v určité situaci. Ptáme se, za jakých okolností dává nějaký nový vektorový potenciál $\boldsymbol{A}'$, dosazený do (14.3), totéž pole $\boldsymbol{B}$? Bude to tehdy, když $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A}'$ budou mít stejnou rotaci:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

Proto

$$\nabla \times \boldsymbol{A}' - \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) = 0.$$

Je-li rotace vektoru nulová, musí být tento vektor gradientem nějakého skalárního pole ψ, tj. $\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A} = \nabla\psi$. Je-li tedy $\boldsymbol{A}$ vektorový potenciál vhodný pro daný problém, bude pro libovolné ψ,