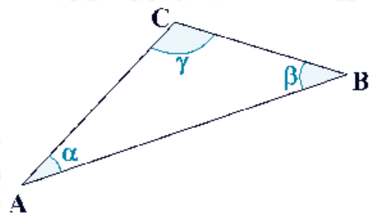
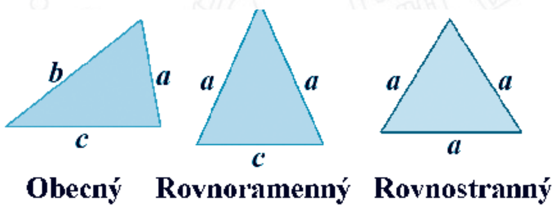
14. TROJÚHELNÍK

Co jsou to vnitřní úhly v trojúhelníku, to nám říká už samotný název. Jejich rameny jsou strany trojúhelníku a jedná se o úhly vyznačené v obrázku. Většinou úhly i jejich velikosti označujeme řeckými písmeny. ■



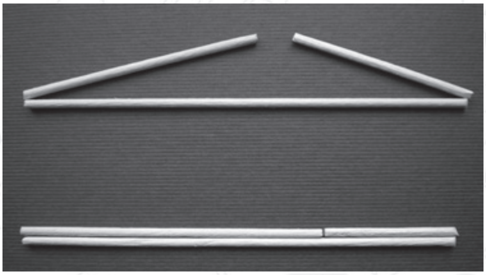
Vnitřní úhly mají jednu důležitou vlastnost. Jejich **součet je vždy 180°**, a to bez ohledu na tvar trojúhelníku. Takže známe-li velikost dvou vnitřních úhlů, třetí můžeme snadno dopočítat. ■

Podle velikosti vnitřních úhlů rozlišujeme několik speciálních případů trojúhelníků. Pokud je jeden z vnitřních úhlů pravý, jedná se o **pravoúhlý trojúhelník**. Pokud jsou všechny vnitřní úhly ostré, hovoříme o **ostroúhlém trojúhelníku**. A je-li některý vnitřní úhel tupý, máme **tupoúhlý trojúhelník**. Ještě malé upozornění – pravý nebo tupý úhel může být v trojúhelníku jen jeden. Proč? Pravý úhel má velikost 90°, kdyby byly dva, jejich součet by už tvořil celkovou hodnotu 180° a na třetí úhel by už nic nezbylo.



Podle délek stran dělíme trojúhelníky na různé speciální typy. **Obecný trojúhelník** má každou stranu jiné délky. Pokud jsou dvě strany shodně dlouhé, nazýváme je **ramena trojúhelníku** a takový **trojúhelník je rovnoramenný**. Třetí straně říkáme **základna**. Vnitřní úhly ležící mezi základnou a těmito rameny jsou oba stejně velké. Trojúhelník, který má všechny tři strany shodné, je **rovnostranný**. Má také stejné všechny vnitřní úhly, z čehož vyplývá, že musí mít všechny velikost 60°, aby daly celkový součet 180°.

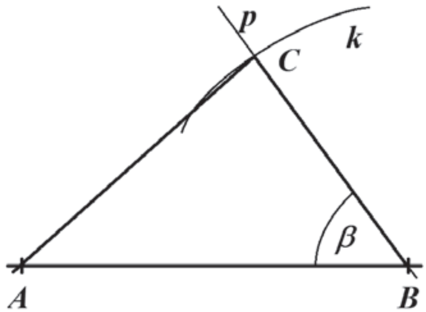
Na první pohled by se mohlo zdát, že z každých tří úseček můžeme vytvořit trojúhelník. Nemusí to jít vždy, podmínkou je, aby byla splněna tzv. **trojúhelníková nerovnost**. Podle ní musí být součet dvou libovolně zvolených stran delší než třetí strana.



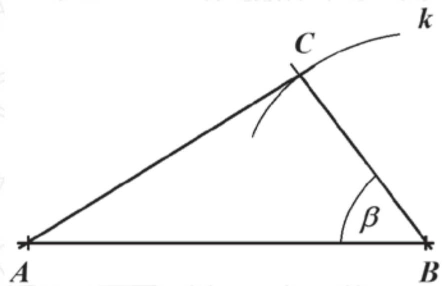
Výška v trojúhelníku je kolmice spuštěná z vrcholu na protější stranu. **Těžnice** zase spojuje vrchol se středem protější strany. Průsečík těžnic – **těžiště** – je vždy uvnitř trojúhelníku. Těžnice se vzájemně dělí na třetiny. Průsečík výšek může ležet mimo trojúhelník.

Trojúhelník je možné sestrojit více způsoby. Záleží na tom, které údaje máme zadány. Podle toho rozlišujeme tři základní konstrukce:
1. podle věty **sss** (známe délky všech tří stran)
2. podle věty **sus** (známe délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného)
3. podle věty **usu** (známe délku jedné strany a velikost dvou úhlů k ní přilehlých

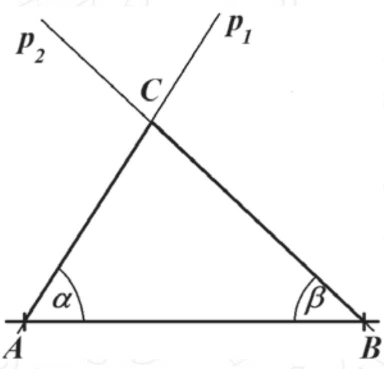
Jak sestrojit trojúhelník podle věty *sss*? Tato konstrukce je nejjednodušší. Začneme základnou trojúhelníku (stranou *c*). Potom si vezmeme do kružítka délku strany *b*, kružítko zapíchneme do bodu *A* a sestrojíme oblouk k_1. Obdobně vezmeme do kružítka délku strany *a*, zapíchneme kružítko do bodu *B* a sestrojíme oblouk k_2. V průsečíku obou oblouků leží hledaný třetí vrchol *C*. Nyní už stačí jej spojit s dalšími vrcholy trojúhelníku.



Při konstrukci trojúhelníku podle věty *sus* opět začneme narýsováním jedné strany trojúhelníka. Dalším krokem je vyměření zadaného úhlu, v našem případě *β*. Nakonec z vrcholu *B* vedeme polopřímku *p* pod tímto úhlem. Poté vezmeme do kružítka délku strany *a*, zapíchneme kružítko do bodu *B* a narýsujeme oblouk *k*. V průsečíku oblouku s polopřímkou leží hledaný bod *C*. Dokončíme trojúhelník *ABC*.



Postupujeme-li podle věty *usu*, začneme opět základnou. Poté z každé strany vyměříme příslušný úhel (*α*, *β*). Z krajních bodů úsečky *AB* vedeme pod vyznačenými úhly polopřímky p_1 a p_2. V jejich průsečíku leží hledaný bod *C*, takže máme trojúhelník *ABC*.



Ještě zbývá připomenout, že obsah trojúhelníku spočítáme pomocí jednoho z následujících vzorců:

$$S = \frac{|v_a| \cdot |a|}{2}, \quad S = \frac{|v_b| \cdot |b|}{2} \quad \text{nebo} \quad S = \frac{|v_c| \cdot |c|}{2}.$$

1. Vypočítej zbývající vnitřní úhel v trojúhelníku *ABC*, kde $\alpha = 35°$, $\beta = 55°$.

Zápis:

Výpočet:

Odpověď:

2. Vypočítej zbývající vnitřní úhel v trojúhelníku s úhly $\alpha = 105°$, $\beta = 12°$.

Zápis:

Výpočet:

Odpověď:

Ukázkový příklad:

Zjisti, zda je možné sestrojit trojúhelník s délkami stran $a = 8$ cm, $b = 15$ cm, $c = 6$ cm.

Musíme ověřit, zda je splněna trojúhelníková nerovnost. Sečteme vždy dvě strany a porovnáme, zda je jejich součet větší než třetí strana. Tato podmínka musí být splněna pro všechny možné dvojice stran:

8 cm + 15 cm = 23 cm, což je větší než 6 cm

15 cm + 6 cm = 21 cm, což je větší než 8 cm

8 cm + 6 cm = 14 cm, to ale není větší než 15 cm,

proto z těchto tří úseček **nemůžeme** sestrojit trojúhelník. V praxi vždy stačí vyzkoušet, zda je součet dvou kratších stran větší než nejdelší strana. Tj. stačí jeden výpočet místo tří.

3. Zjisti, zda je možné z těchto tří úseček sestrojit trojúhelník:

a) $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 8$ cm

Výpočet:

Odpověď:

b) $a = 15$ cm, $b = 7$ cm, $c = 5$ cm

Výpočet:

Odpověď:

4. Pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu *B* má úhel $\alpha = 28°$. Vypočítej velikost třetího vnitřního úhlu a také velikosti všech vnějších úhlů. Úhly znázorni v náčrtku.

5. Sestroj trojúhelník *ABC*, máš-li zadáno:

   $c = 7$ cm, $a = 5$ cm, $\beta = 110°$. Potom v něm sestroj všechny výšky.

6. Sestroj rovnoramenný trojúhelník *KLM* se základnou délky 4 cm a úhlem ležícím proti základně o velikosti 40°. V tomto trojúhelníku sestroj všechny těžnice.

7. Sestroj rovnostranný trojúhelník *XYZ* o délce strany 4 cm.

8. Destrukce!

   Relaxace je důležitá. A proto jako malé odreagování tuhle stránku pokryj množstvím rovnostranných trojúhelníků, které se budou vzájemně dotýkat. Pak si vezmi pastelky a každý trojúhelník vybarvi nějak jinak. Můžeš tvořit nejrůznější vzory. V podstatě tak získáš svoje malé relaxační omalovánky. Kdo by to byl čekal, dvě knížky v jedné! 😊 #destrukcnimatika.

Zlomkem vyjadřujeme část celku. Představ si třeba koláč, který krájíš. Na poloviny, potom na čtvrtiny, ještě na menší dílky... Jak vypadá třeba jedna osmina koláče? Musíš jej nejprve rozkrájet na 8 stejných dílků. Když tři z nich sníš, snědl jsi tři osminy koláče. Toto množství se dá snadno zapsat pomocí zlomku.

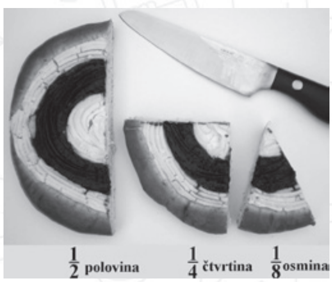
Spodní číslo ve zlomku (**jmenovatel**) nám pojmenovává, na kolik dílů je celek rozdělen. Horní číslo (**čitatel**) vyjadřuje, kolik těchto částí máme. Zlomek „tři osminy" znamená, že jsme celek rozdělili na 8 stejných dílů a z nich jsme si vzali 3. Čísla ve zlomku rozděluje vodorovná **zlomková čára**.

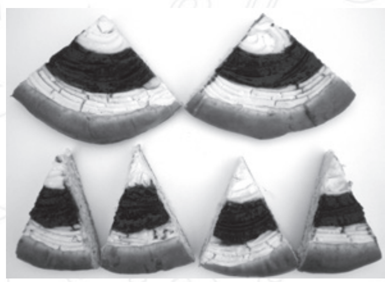
Na obrázku názorně vidíme, jak pojmenujeme různě velké části celku. ■

Zajímavé je, že dva různé zlomky mohou vyjadřovat stejné množství. Porovnej si na obrázku, jak moc se najíš, sníš-li dvě čtvrtiny koláče nebo když si vezmeš čtyři osminy koláče. V druhém případě sice budeš mít na talíři více kusů, ale najíš se stejně. Sníš totiž v obou případech polovinu koláče.

Takže vidíme, že platí:

$$\frac{4}{8} \xrightarrow{:2} \frac{2}{4} \xrightarrow{:2} \frac{1}{2} \qquad \frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$





Druhý zlomek dostaneme z prvního, když čitatele i jmenovatele vydělíme dvěma. Stejným způsobem dostaneme poslední zlomek. Tomuto postupu, kdy čitatele i jmenovatele dělíme stejným číslem, říkáme **krácení zlomků**. Poslední zlomek už nelze krátit, je v tzv. **základním tvaru**.
Opačným postupem ke krácení je **rozšiřování zlomků**, při němž čitatele i jmenovatele násobíme stejným číslem. Musíme si uvědomit, že i po rozšiřování nebo krácení vyjadřuje zlomek vlastně stále stejně velkou část celku. ■

Častým úkolem bývá zkrátit zlomek až na základní tvar. Musíme najít takové číslo, které je společným dělitelem čitatele i jmenovatele zlomku, a tímto dělitelem krátíme. Výsledek tohoto krácení ještě nemusí být základní tvar. Pokud se dá opět najít nějaký společný dělitel, pokračujeme v krácení, a to tak dlouho, až není další krácení možné.

Pro sčítání zlomků platí jedno základní pravidlo. Sčítat můžeme pouze zlomky se stejným jmenovatelem, a to tak, že spolu sečteme čitatele a jmenovatele necháme stejného. Například $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

Totéž platí pro odčítání, například $\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=\frac{4}{8}$

Takto jednoduše vše funguje u zlomků se stejnými jmenovateli. Prostě sčítat, případně odčítat, můžeme jen poloviny s polovinami, třetiny s třetinami, čtvrtiny s čtvrtinami apod.
Co ale dělat v případě, že potřebujeme spolu sečíst dva zlomky, které nemají stejná čísla ve jmenovateli? Pomocí vhodného rozšiřování nebo krácení zlomků je musíme převést na takový tvar, aby oba měly stejný jmenovatel, protože to je jediný případ, který umíme vypočítat. Tomuto postupu říkáme, že zlomky **převedeme na společného jmenovatele**. Společný jmenovatel se volí tak, aby byl společným násobkem jmenovatelů obou zlomků. Stejně postupujeme i u odečítání zlomků. ■

Při hledání společného jmenovatele je dobré trošku přemýšlet a zvolit nejmenší možný společný násobek, i když samozřejmě volba dalšího většího společného násobku není chyba. Například sčítáme-li zlomky $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$, můžeme za společný jmenovatel zvolit číslo 24, které dostaneme vynásobením $4 \cdot 6$, ale nejmenší společný násobek je číslo 12. Vynásobení je jistota. Jen je pak problém při úpravě výsledku na základní tvar.

Ukažme si na příkladu, jak sčítáme zlomky s různými jmenovateli.

Máme sečíst $\frac{4}{5}+\frac{1}{3}$

Tyto zlomky nemají stejné jmenovatele, musíme tedy začít tím, že je převedeme na společného jmenovatele. Nejmenší společný násobek čísel 5 a 3 je číslo 15. Oba zlomky musíme nyní rozšířit vhodným číslem tak, abychom dostali požadovaný jmenovatel.

První zlomek má jmenovatel 5. Abychom dostali jmenovatel 15, musíme zlomek rozšířit číslem 3:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{12}{15}$$

Druhý zlomek má jmenovatel 3. Abychom dostali jmenovatel 15, musíme zlomek rozšířit číslem 5:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5}=\frac{5}{15}$$

Místo původních zlomků nyní sčítáme tyto nové zlomky. Ty již mají stejné jmenovatele, takže stačí sečíst jejich čitatele a máme výsledek:

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=\frac{12}{15}+\frac{5}{15}=\frac{17}{15}$$

Vždy sčítáme jen čitatele (počet kusů, na které jsme dělili, zůstává stejný, byl by proto nesmysl sčítat jmenovatele).

Ukázkový příklad 1:

Zkrať na základní tvar zlomek $\frac{24}{30} =$

Tato čísla mají více společných dělitelů a je jedno, kterým z nich začneme. Zvolíme si nejjednodušší variantu a budeme krátit číslem 2:

$24 : 2 = 12$

$30 : 2 = 15$

Takže vidíme, že $\frac{24}{30} = \frac{12}{15}$. Nový zlomek ale ještě není v základním tvaru, protože obě čísla jsou dělitelná třemi, takže pokračujeme v krácení:

$12 : 3 = 4$

$15 : 3 = 5$

Dostali jsme zlomek $\frac{4}{5}$, který už dále nejde krátit, takže jde o základní tvar původního zlomku.

1. Zkrať na základní tvar tyto zlomky:

a) $\frac{24}{36} = \_\_$ b) $\frac{15}{45} = \_\_$ c) $\frac{8}{12} = \_\_$

2. Rozšiř zlomek $\frac{3}{5}$ vhodným číslem tak, aby měl ve jmenovateli číslo 20.

____

____

3. Rozšiř zlomek $\frac{3}{4}$ vhodným číslem tak, aby ve jmenovateli bylo číslo 24.

____

____

4. Které zlomky vyjadřují stejně velkou část celku? Spoj čarou vždy po jednom zlomku z každého sloupce:

$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{3}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{8}$
$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{16}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

5. Jak velká část čokolády je označena barevně? Vyjádři zlomkem a zkrať jej na základní tvar.

____