10. POSLOUPNOSTI A ŘADY

Posloupnosti

Posloupnost je funkce definovaná na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$. Taková posloupnost je nekonečná. **Nekonečnou posloupnost** zapisujeme: $a_1; a_2; a_3; a_4;\ldots$ nebo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Konečnou posloupností nazýváme funkci, jejímž definičním oborem je množina prvních k přirozených čísel, tedy $D(f) = \{1, 2, 3,\ldots, k\}$. Konečnou posloupnost pak zapisujeme $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_k$ nebo $(a_n)_{n=1}^{k}$.
Jednotlivé funkční hodnoty nazýváme členy posloupnosti, přirozený koeficient udává **pořadí členu** v posloupnosti: $a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n; a_{n+1}; a_{n+2}; \ldots$
Při **grafickém znázornění** každý člen posloupnosti zobrazujeme jako bod o souřadnicích $[n; a_n]$.

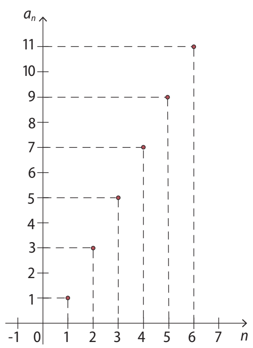
Zadání posloupnosti:

- slovním předpisem
- výčtem prvků u konečné posloupnosti
- graficky u konečné posloupnosti (členy jsou znázorněny navzájem izolovanými body)
- funkčním předpisem
  – vzorcem pro n-tý člen
  – rekurentně – je dán první člen nebo několik prvních členů posloupnosti a uveden předpis pro určení dalších členů pomocí předcházejících

Příklad ▼

Stejnou posloupnost můžeme zadat různými způsoby.

- slovním předpisem:
  Posloupnost tvoří kladná lichá čísla menší než 13.
- výčtem prvků: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
- vzorcem pro n-tý člen: $a_n = 2n - 1$
  pro $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; nebo $(2n-1)_{n=1}^{6}$
- graficky:



Příklad ▼

Vyčíslete prvních 5 členů posloupnosti zadané rekurentně.

$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 3; a_{n+2} = a_{n+1} + 2 \cdot a_n$

$a_3 = a_2 + 2 \cdot a_1 = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$
$a_4 = a_3 + 2 \cdot a_2 = 4 + 2 \cdot 3 = 10$
$a_5 = a_4 + 2 \cdot a_3 = 10 + 2 \cdot 4 = 18$

Vlastnosti posloupností (vycházejí z vlastností funkcí)

Rostoucí	$\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} > a_n$
Klesající	$\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} < a_n$
Nerostoucí	$\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \leq a_n$
Neklesající	$\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \geq a_n$
Shora omezená	$\exists h \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq h$
Zdola omezená	$\exists d \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq d$
Omezená	Současně omezená zdola i shora.

Příklad ▼

Určete prvních pět členů posloupnosti $a_n = n(n-2)$. Určete vlastnosti této posloupnosti.

$a_1 = 1 \cdot (-1) = -1; a_2 = 2 \cdot (2-2) = 0; a_3 = 3 \cdot (3-2) = 3; a_4 = 8; a_5 = 15$
Pracujeme obecně se dvěma po sobě jdoucími členy.
Člen následující po členu a_n je člen $a_{n+1} = (n+1)(n-1)$.
Ověříme, zda je posloupnost např. rostoucí (jak naznačují první členy), zda rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je pro všechna přirozená čísla kladný:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n-1) - n(n-2) = 2n - 1$$

$2n - 1 > 0 \;\rightarrow\; n > \frac{1}{2} \;\rightarrow$ nerovnosti vyhovují všechna přirozená čísla. Zadaná posloupnost je tedy rostoucí. Nejmenší hodnotu má první člen. Posloupnost je zdola omezená číslem -1.

Aritmetická posloupnost

Posloupnost se nazývá **aritmetická**, právě když existuje reálné číslo d takové, že v posloupnosti pro každé přirozené číslo n platí: $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$. Číslo d nazýváme **diference** aritmetické posloupnosti.
Název aritmetická posloupnost je odvozen od vlastnosti této posloupnosti – počínaje druhým členem je každý člen roven **aritmetickému průměru** sousedních členů:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Pro členy v aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dále platí:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a_s = a_r + (s-r)d \qquad r, s \in \mathbb{N}, s > r$$

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$