4/ ÚLOHY

V následující kapitole jsou zařazeny řešené a zejména neřešené úlohy pro samostatnou práci žáků. Mimořádně nadané děti často řeší úlohy z hlavy, pomocí vhledu. Těmto dětem není vhodné ani účelné vnucovat algoritmus, pomocí kterého by měly postupovat. To je velmi obtěžuje a matematika je potom přestává bavit. Mann (2006) upozorňuje, že chybějící kreativita ve školní matematice redukuje výuku matematiky na získávání souboru dovedností, které je potřeba zvládnout a naučit se je nazpaměť. Nadané děti potom ztrácejí o školní matematiku zájem, nevyhovuje jim styl výuky zaměřený na jednu správnou odpověď a preferující rychlé hledání výsledku (Mann, 2006, s. 249). Z našich zkušeností je však opět potřeba zdůraznit, že se od sebe lišily děti mimořádně nadané, které nechtěly problémy řešit pomocí algoritmu, a nadané či bystré děti, kterým použití známého postupu naopak vyhovovalo.

Nadané děti bychom dále měli vést k tomu, aby popisovaly tok svých myšlenek, a nezapisovaly pouze výsledek. Zejména mimořádně nadané děti, které výsledek „tak nějak vidí", ale zdá se jim zbytečné popsat, jak k němu dospěly, by si postupně měly rozvíjet schopnost zaznamenat či popsat svůj postup. Bude to pro ně mnohokrát užitečné jak ve školním, tak v osobním životě.

V první podkapitole uvádíme úlohy, které mohou být zadávány již žákům prvního ročníku. Následují úlohy pro žáky 2. až 5. ročníku. Úlohy jsou rozděleny podle toho, zda jsou vhodné spíše pro mladší nebo starší děti, ikonkami 23 a 45.

V některých případech používáme termíny a poznatky, které děti na daném stupni zatím neprobíraly, což však není na závadu. Podle našich zkušeností mívají nadaní žáci tendence postupovat v matematice rychleji než jejich vrstevníci. Je tedy docela možné, že se s termíny již setkali, a pokud ne, rádi si novou informaci doplní. Jestliže ale žák nejeví o tyto termíny zájem, je možno příklad přeskočit nebo volit terminologii žákovi známou.

4.1/ Úlohy pro bystré a nadané prvňáčky

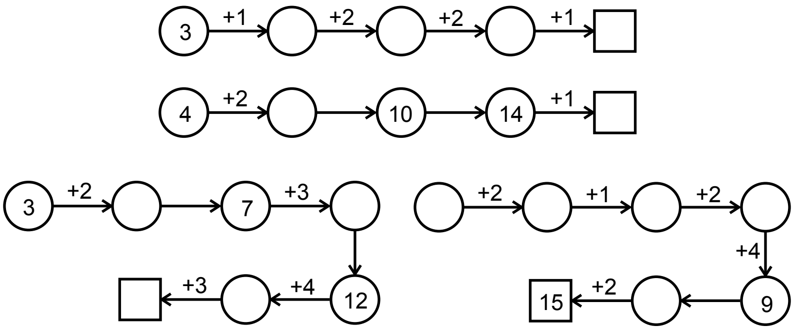
Máte doma nebo ve třídě prvňáčka, který by neustále něco počítal, a vy mu nestíháte zadávat příklady? A když není dostatečně zaměstnán, začne vyrušovat a zlobit? Nebo se naopak uchýlí do svého vnitřního světa a přestane vnímat své okolí? Tak přesně pro vás jsou určeny úlohy, které mohou zaměstnat bystré a nadané prvňáčky, kteří jsou vždy se vším hotovi dříve než ostatní děti. A co je na těchto úlohách nejlepší? U většiny z nich můžete sami vymýšlet analogie a tím svého prvňáka zásobit mnoha dalšími příklady.

V první třídě se v oblasti aritmetiky zabýváme operacemi s přirozenými čísly a v oblasti geometrie rozvojem prostorové představivosti.

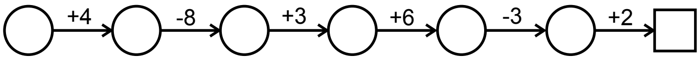
4.1.1/ Housenky

Principem housenky je doplňovat čísla, a to buď mezivýsledky (do kroužků), anebo příkaz k operaci (nad šipku). Začínáme nejjednoduššími příklady bez přechodu přes základ 10, postupně náročnost zvyšujeme podle toho, jak je dítě při řešení úspěšné.

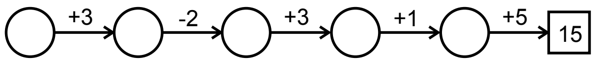
Cvičení 1. Doplň do housenky čísla.



Cvičení 2. Jaké bude číslo na konci housenky? Číslo v hlavičce si zvol sám / sama.

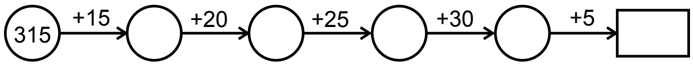


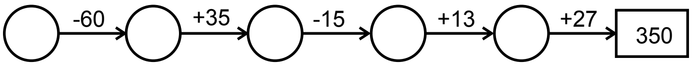
Cvičení 3. Jaké číslo zapíšeš do hlavičky housenky?



Poznámka: Úlohy s housenkami můžeme modifikovat podle aktuálních dovedností dětí. Pokud jsou pro ně příklady na sčítání či odčítání malých čísel již příliš jednoduché, je možné zadávat příklady s většími čísly, jak naznačuje následující úloha.

Cvičení 4. Doplň do housenek správná čísla.

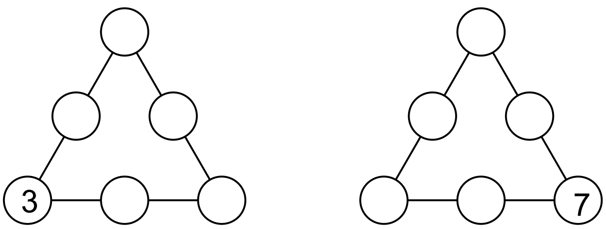




Cvičení 5. Doplň do čtverečků znaménka + a – tak, aby vyšel správný výsledek.

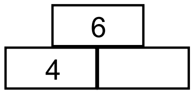
60 ☐ 30 ☐ 10 = 80   52 ☐ 3 ☐ 9 ☐ 5 = 45

Cvičení 6. Doplň do trojúhelníku čísla od 3 do 8 tak, aby součet čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.



4.1.2/ Pyramidy

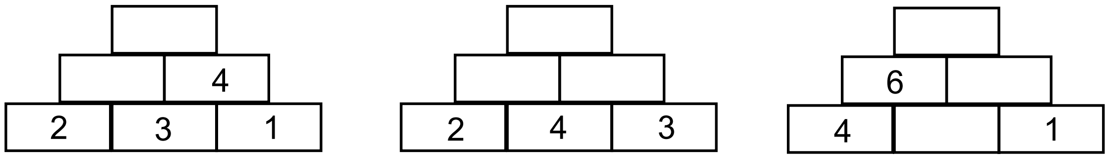
Součtovou pyramidu sestavujeme zdola nahoru tak, že vždy **sčítáme sousední čísla** a výsledek zapíšeme do políčka nad tato dvě čísla. Příklady volíme postupně od jednoduchých ke složitějším, tj. nejdříve na sčítání bez přechodu přes základ deset a později s přechodem. Nejjednodušší jsou pyramidy, které mají spodní řádek celý vyplněný čísly. U těchto pyramid pouze sčítáme. Obtížnější pyramidy mají v každém řádku vynechané nějaké číslo, to znamená, že tato čísla musíme „dopočítávat". Dopočítávání je předstupněm odečítání. Je-li v pyramidě následující uskupení obdélníků, pak dítě musí uvažovat způsobem „4 a kolik je 6?" Výsledek je 2.

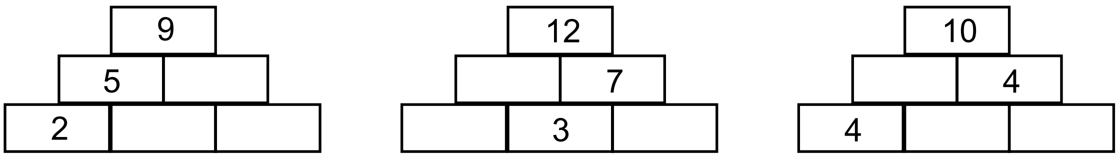


Nejnáročnější pyramida má čísla pouze v dolních rozích.

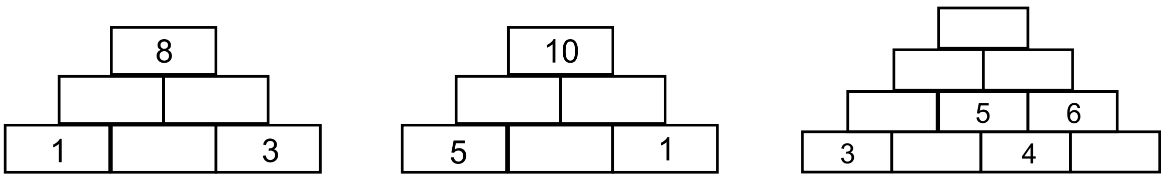
Součtové pyramidy nejenže mohou vymýšlet rodiče nebo učitelé, ale také je mohou bystří a nadaní žáci vymýšlet pro své spolužáky. Tím si zdokonalují své matematické schopnosti.

Cvičení 7. Doplň do součtové pyramidy čísla.



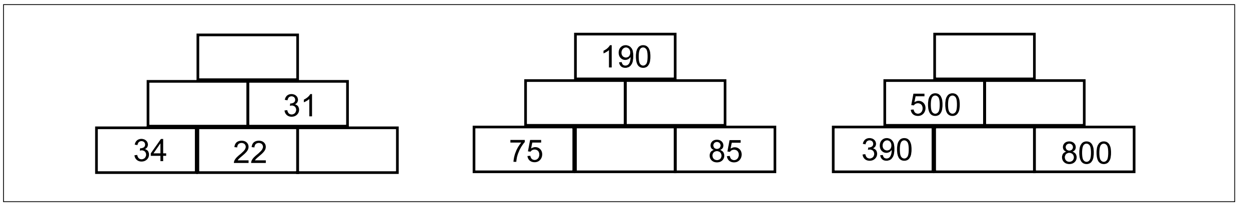


Cvičení 8. Doplň do součtové pyramidy čísla.

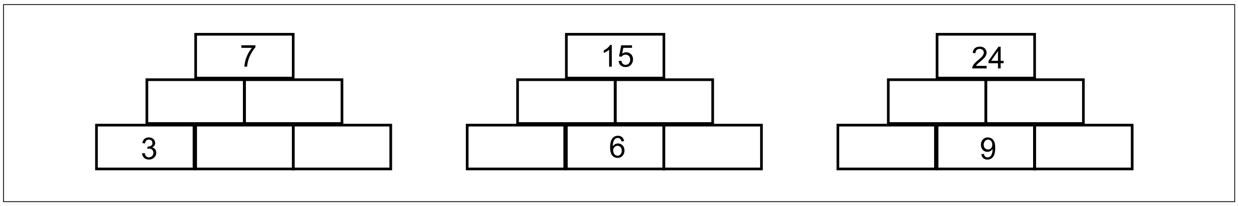


Poznámka: Také v pyramidách můžeme volit větší čísla, jestliže s malými čísly již dítě nebaví počítat. Další možnou modifikací je zadávání úloh, které mají více správných řešení. U těchto úloh si žák navíc rozvíjí také kombinační schopnosti.

Cvičení 9. Doplň do následujících součtových pyramid čísla.



Cvičení 10. Pro následující pyramidy najdi všechna možná řešení.



4.1.3/ Magické čtverce a sudočku

V magickém čtverci je úkolem doplnit čísla do políček tak, aby v každém řádku, sloupci i úhlopříčce byl stejný předem stanovený součet, který nazýváme **magické číslo** čtverce. Menší děti ale zpočátku dělají tu chybu, že začnou čtverec vyplňovat nahodile. Např. je-li uprostřed prvního řádku číslo 1 a není zde žádná další informace, dítě si doplní řádek podle svého např. čísly 6 a 8, nebo 5 a 9, neboť v obou případech je součet v řádku roven patnácti. Na začátku je proto nutné důsledné vedení dospělým, který dítěti trpělivě vysvětluje princip doplňování. Pravidlo číslo jedna je, že vždy mohu vyplňovat jen ten řádek, u kterého znám dva údaje.

„Sudočku" je zmenšené sudoku, které mohou řešit již prvňáčci. Úkolem je, aby v každém řádku a každém sloupci byla každá číslice 1, 2, 3, 4 právě jednou.

Cvičení 11. Doplň čísla od 1 do 9 do magického čtverce tak, aby součet ve všech řádcích a ve všech sloupcích každého čtverce byl 15.

8	1	
	5	7
4		2

4		
	5	7
	1	

	7	
1		9
8		

Cvičení 12. Urči magické číslo následujících magických čtverců a čtverce doplň (všechny tři čtverce mají totéž magické číslo).

9		
	10	6
		11

13	6	
		7

	12	11
	8	

Cvičení 13. Doplň prázdná místa v sudočku tak, aby v každém řádku a každém sloupci byla obsažena čísla 1, 2, 3, 4.

1	2		4
2		4	1
3		1	2
	1		

2	3	4	
1	2		
			3
3		1	2

	2		4
			1
3		1	2
2	1		

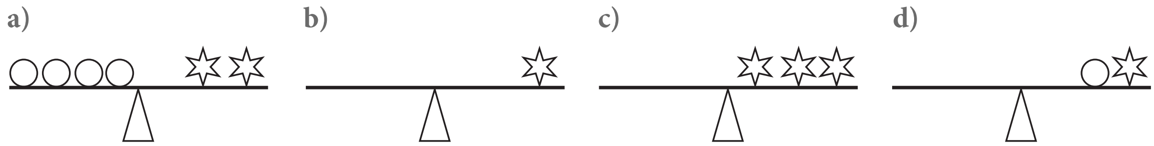
4.1.4/ Rovnoramenné váhy a houpačky

Úlohy s rovnoramennými vahami či houpačkami mohou mít různé podoby. Rozvíjí schopnost pracovat s přirozenými čísly, zvažovat různé možnosti a jsou rovněž velmi účinnou propedeutikou pro budoucí učivo o rovnicích.

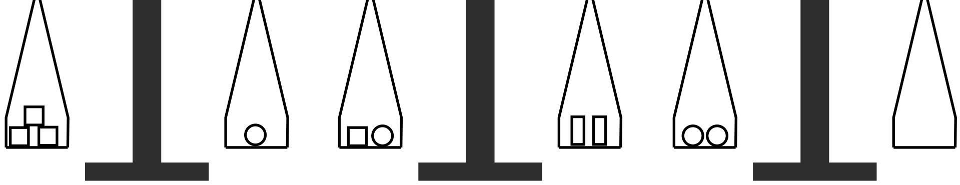
U těchto úloh jde obvykle o to umístit na obě ramena váhy závaží tak, aby nastala rovnováha. Malé děti mohou mít zpočátku problémy s tím, že nechápou, jak mají nějakému objektu (např. čtverečku) přiřadit číselnou hodnotu. Dospělý může dítěti významně pomoci návodnými otázkami, např. jsou-li na levé straně váhy tři čtverce a na pravé straně jeden kroužek, může se dospělý zeptat: „Kdyby čtverec měl hodnotu 1, jakou hodnotu musí mít kroužek?“ Po několika podobných návodných otázkách se obvykle bystří a nadaní žáci „chytnou“ a začnou úlohy řešit samostatně.

Úlohy velmi často mívají více řešení. U dětí v prvním ročníku stačí, když se jim podaří najít jedno řešení.

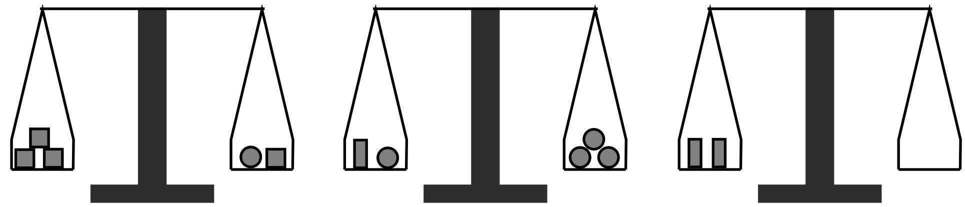
Cvičení 14. Na obrázku a) je váha v rovnováze. Doplň kouličky do dalších obrázků tak, aby váha byla zase v rovnováze:



Cvičení 15. Kolik obdélníků musí být na pravé straně poslední váhy, aby nastala rovnováha? Jaká je hodnota jednotlivých útvarů?



Cvičení 16. Kolik kroužků musíme umístit na pravou stranu poslední váhy, aby nastala rovnováha? Jaká je hodnota jednotlivých útvarů?



4.1.5/ Algebrogramy

Algebrogramy jsou úlohy na procvičování operací s přirozenými čísly, kdy některé nebo všechny cifry jsou nahrazeny písmeny. Platí, že různá písmena odpovídají různým cifrám. V algebrogramu můžeme provádět různé početní výkony, avšak v první třídě se omezujeme na sčítání.

Mnoho algebrogramů má více řešení. U malých dětí se spokojíme s tím, když najdou alespoň jedno řešení. Postupně je však vedeme k logickému hledání a zdůvodňování, kdy nehledají pouze experimentálně, ale deduktivně. Tímto způsobem jsou děti schopny najít všechna řešení. Např. algebrogram

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ C & C & C \\ \hline 9 & 6 & 4 \end{array}$$

má dvě různá řešení. První možnost

$$\begin{array}{ccc} 7 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ \hline 9 & 6 & 4 \end{array}$$

je schopna najít většina bystrých dětí. U druhého řešení musíme již uvažovat i sčítání s přechodem přes základ 10. Platí 7 + 7 = 14, tedy C = 7, napíšeme 4, desítku připočítáme k vyššímu řádu (tj. k B + C). Dále ze součtu 7 + B + 1 určíme, že B = 8 (protože 7 + B + 1 musí být číslo, které má na pozici jednotek 6). Napíšeme 6, desítku připočítáme k vyššímu řádu. V posledním kroku 7 + A + 1 = 9, A = 1. Druhá možnost má tedy tvar

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ \hline 9 & 6 & 4 \end{array}$$

Cvičení 17. Nahraď písmena A - E jednocifernými čísly, když víš, že současně platí:

$$A + A = 8$$
$$B + A = 11$$
$$B + C = 9$$
$$C + D = B$$
$$C + E = D$$

Cvičení 18. Nahraď písmena čísly v následujících algebrogramech.

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ C\,C\,C \\ \hline 6\,5\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} K\,L\,M \\ L\,L\,L \\ \hline 7\,6\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} X\,Y\,Z \\ X\,X\,X \\ \hline 1\,0\,7\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} I\,J\,I \\ L\,I\,J \\ \hline 8\,6\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} O\,P\,Q\,R \\ P\,Q\,R \\ Q\,R \\ \hline P\,S\,P\,R \end{array}$$

Cvičení 19. Najdi všechna řešení algebrogramu

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \\ B\,C\,D \\ C\,D \\ D \\ \hline 4\,6\,6\,4 \end{array}$$

4.1.6/ Slovní úlohy

Slovní úlohy jsou pro žáky důležité od začátku školní docházky. Žáci se díky nim učí porozumět textu s matematickým obsahem. Je však třeba mít na paměti, že řešení slovních úloh je dovednost, která musí být postupně rozvíjena, a to i u nadaných žáků. Ti mnohdy řeší úlohy z hlavy a zapisování se jim zdá zbytečné. Schopnost popsat strukturu svých myšlenek bude důležitá u řešení složitějších úloh nebo v matematických soutěžích, jako je Matematická olympiáda. Jedním aspektem je formální stránka řešení, kdy se děti snažíme dovést k tomu, aby systematicky

a) zapisovaly zadání (pokud je to potřeba pro zpřehlednění situace),
b) úlohu si znázornily (je-li to možné a účelné), což usnadní pochopení vztahů,
c) pochopily vztah mezi hledanými a zadanými údaji,
d) zapsaly matematický zápis, úlohu vyřešily,
e) prováděly zkoušku správnosti řešení a konfrontovaly výsledek s realitou,
f) zapisovaly slovní odpověď.

Druhým aspektem je seznamování s metodami, které mohou při řešení žákům pomoci. Jedná se o

a) používání různých pomůcek, jako je počitadlo, kuličky, kostky atd.,
b) zakreslování schémat a obrázků,
c) systematické experimentování.

Aby se děti těmto dovednostem mohly efektivně učit, je potřeba mít na paměti, že pro malé děti jsou důležité konkrétní situace, které nejsou příliš náročné na abstrakci, a že je alespoň na počátku důležité počítat s malými čísly.

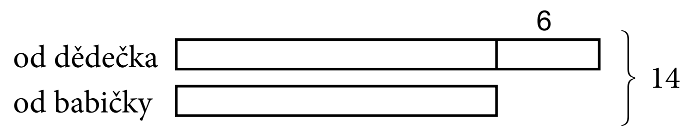
Každému dítěti vyhovuje jiný typ úloh, každé dítě má své osobité způsoby řešení. Proto je dobré nechat dítěti chvíli času na to, aby si po svém zapsalo zkrácený zápis, a aby se samo pokusilo úlohu vyřešit. Není vhodné, abychom dítěti vnucovali své vlastní způsoby zápisu, které ho mohou zcela poplést, ani svůj způsob řešení, protože dítě se na úlohu může dívat zcela jinak než dospělý. Jestliže dítě úlohu vyřeší a neřekne u toho ani slovo, zeptá se ho dospělý, jak na výsledek přišlo. Nadané děti mají velmi často problém s tím, aby dokázaly popsat tok svých myšlenek, a je proto důležité tuto dovednost kultivovat. Jestliže dítě nedokáže úlohu uchopit, dospělý mu může nabídnout pomůcku – počitadlo, kuličky, nebo navrhne dítěti, ať si situaci schematicky zakreslí. Tento krok mnoha dětem pomůže v dalším řešení. Rozhodně se zdržujeme toho prozradit správné řešení.

Na jedné úloze ukážeme možný přístup k řešení slovní úlohy. V této úloze předpokládáme, že dítě již umí číst a psát.

Úloha 8. ***Zuzka dostala od babičky a dědečka dohromady 14 Kč. Od dědečka dostala o 6 Kč více než od babičky. Kolik Kč dostala od dědečka a kolik od babičky?***

Řešení: Nejčastěji se setkáváme s řešením úvahou. Žák rozdělí celkový počet korun na dvě hromádky, tj. 14 = 7 + 7, postupně přesouvá koruny z jedné hromádky na druhou, až je splněna druhá podmínka zadání, tedy14 = 4 + 10.

Úlohu můžeme také graficky znázornit. Z vhodného obrázku pak snadno odvodíme početní postup:



Obrázek nám pomůže s úvahou 14 – 6 = 8, 8 : 2 = 4. Můžeme se setkat i s dalšími možnostmi řešení.

Odpověď: Zuzka dostala od dědečka 10 Kč a od babičky 4 Kč.

Zkouška: Ověřujeme, že jsou splněny podmínky úlohy, tj. že Zuzka dostala celkem 14 Kč (10 + 4 = 14) a že od dědečka dostala o 6 Kč více než od babičky (10 je o 6 větší než 4).

Cvičení 20. Rozděl 9 oříšků do dvou misek. Najdi více různých řešení.

Cvičení 21. Myslím si číslo. Když k němu přičtu 4, dostanu 9. Které číslo si myslím?

Cvičení 22. Myslím si číslo. Když od něj odečtu 8, dostanu 6. Které číslo si myslím?

Cvičení 23. Myslím si číslo. Když k němu přičtu 4 a potom odečtu 3, dostanu 7. Které číslo si myslím?

Cvičení 24. Myslím si číslo. Když k němu přičtu 7 a potom odečtu 2, dostanu 5. Které číslo si myslím?

Cvičení 25. Které číslo musím přičíst k číslu 9, abych dostal 16?

Cvičení 26. Které číslo musím odečíst od čísla 17, abych dostal 8?

Cvičení 27. Máš 12 Kč a to je o 5 Kč méně, než mám já. Kolik Kč mám já?

Cvičení 28. Pavla má 10 Kč a to je o 3 Kč více, než má Klára. Kolik Kč má Klára?

Cvičení 29. Děvčat je o tři více než chlapců. Chlapců je 6. Kolik jich je dohromady?

Cvičení 30. Chlapců je o 7 méně než děvčat. Děvčat je 15. Kolik jich je dohromady?

Cvičení 31. Jeníček a Mařenka natrhali dohromady 12 perníčků. Jeníček natrhal o 2 více než Mařenka. Kolik perníčků natrhal Jeníček a kolik Mařenka?

Cvičení 32. Adélka a Štěpán našetřili dohromady 20 Kč. Štěpán našetřil o 2 Kč méně než Adélka. Kolik Kč našetřil každý z nich?

Cvičení 33. Linda dostala od babičky a dědečka dohromady 37 Kč. Od dědečka dostala o 5 Kč více než od babičky. Kolik Kč dostala od dědečka a kolik od babičky?

Cvičení 34. Janě je 8 roků, Lenka je o 3 roky starší než Jana, Monika je o 2 roky mladší než Lenka. Která z nich je nejmladší?

Cvičení 35. Eliška navléká modré a žluté korálky tak, že střídá 1 modrý a 2 žluté. Kolik žlutých bude potřebovat, když má 8 modrých?

Cvičení 36. Petr má 14 koleček a přemýšlí, kolik autíček a kolik trojkolek by z nich mohl sestavit tak, aby mu žádné kolečko nezbylo.

Cvičení 37. Kolik obdélníků můžeš sestavit z 18 čtverečků, aby v každém obdélníku bylo všech 18 čtverečků?

Cvičení 38. Uměl bys sestavit:

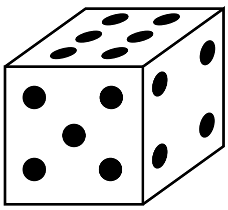
a) Z dvanácti stejných tyčinek čtyři čtverce?
b) Z šesti stejných tyčinek čtyři čtverce?
c) Z pěti stejných tyčinek dva trojúhelníky?
d) Z pěti stejných tyčinek jeden trojúhelník?

4.2/ Schémata pro odvalování kostky

Principem úlohy je to, aby žák pouze ve své mysli „převracel" hrací kostkou přes její hranu a sledoval stěnu, která je v daný okamžik horní. U malých dětí není představivost rozvinuta natolik, aby mohly pracovat pouze mentálně. Proto jim dáme zpočátku hrací kostku[3], se kterou pracují podle pokynů a zapisují si údaje. Účelem je ale rozvíjet schopnost **mentální manipulace**, a proto je vhodné dítěti po určité době kostku odebrat. Mentální manipulace je jedním z faktorů prostorové představivosti. Jde o schopnost percepčního předvídání, schopnost určovat novou představu objektu po jeho transformaci, např. otočením, posunutím aj. (Juščáková, 2002).

Žákům nejdříve vysvětlíme, co je jejich úkol: V mysli „převracet" hrací kostku přes její hranu a sledovat stěnu, která je právě horní. Musí se dohodnout terminologie a pravidla:

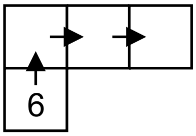
1. Ve všech úlohách se hrací kostka odvaluje ze **základní polohy**, která je znázorněna na obrázku níže. Tedy na dolní stěně je 1, na horní 6, na pravé straně je 4, na levé 3, na přední 5 a na zadní 2.



3 Přesvědčily jsme se, že existují dva druhy hracích kostek. Ujistěte se, že dítě pracuje se stejným typem kostky, který je zde používán. V opačném případě bude získávat jiné výsledky.

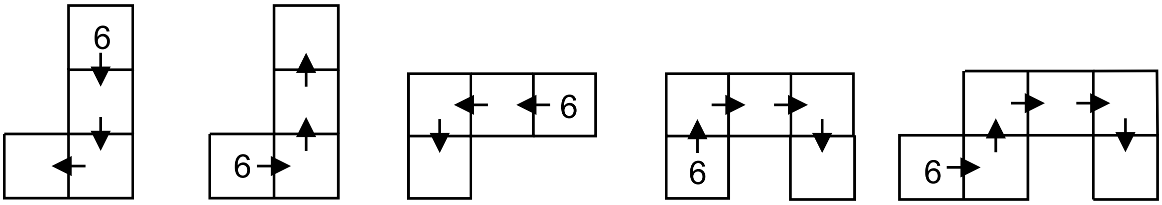
2. Žáci dostanou hrací plán s políčky a šipkami. Šipky značí směr odvalení kostky: → doprava, ← doleva, ↑ dozadu, ↓ dopředu.

Úloha 9. ***Na následujícím plánu máš označeny směry převalování kostky. Začínáme v základním postavení. Jaké číslo je na horní stěně kostky v posledním poli?***



Řešení: Odvalíme-li kostku dozadu, je na horní stěně 5. Když nyní kostku odvalíme doprava, je nahoře 3, a když ještě jednou doprava, je na horní stěně hodnota 2. V posledním poli je tedy číslo 2.

Cvičení 39. 2/3, 4/5 Jaké číslo je na horní stěně kostky v posledním poli?



V druhém typu úloh žáci po představě odvalení doplní šípky do hracího plánu a pak si manipulací s kostkou své řešení ověří.