KAPITOLA 5
VĚČNÉ TROJÚHELNÍKY

Trigonometrie a logaritmy

Euklidovská geometrie je založena na trojúhelnících zejména proto, že každý mnohoúhelník lze z trojúhelníků sestavit, a většinu ostatních zajímavých útvarů, jako jsou kruhy a elipsy, lze aproximovat pomocí mnohoúhelníků. Metrické vlastnosti trojúhelníků – ty, které lze změřit, jako jsou délky stran, velikosti úhlů nebo obsah – jsou součástí rozmanitých vzorců, mnoha z nich elegantních. Jejich praktické použití, které je extrémně užitečné v navigaci a průzkumu, vyžadovalo rozvoj trigonometrie, která v podstatě znamená „měření trojúhelníků".

Trigonometrie

Trigonometrie zplodila spoustu speciálních funkcí – matematická pravidla pro výpočet jedné hodnoty z druhé. Tyto funkce mají jména jako *sinus*, *kosinus* a *tangens*. Goniometrické funkce se staly životně důležitými pro celou matematiku, nejen pro měření trojúhelníků.

Trigonometrie je jedna z nejvíce používaných matematických technik zahrnutá ve všem, od průzkumu přes navigaci až po satelitní systémy GPS v autech. Její použití ve vědě a technologiích je tak běžné, že si jí většinou ani nevšimneme – tak je to správné pro každý univerzální nástroj. Historicky byla úžeji spjata s logaritmy, chytrou metodou pro převod násobení (které je obtížné) na sčítání (které je snadné). Hlavní myšlenky se objevily v letech 1400 až 1600, i když tomu předcházela dlouhá prehistorie a následovalo pozdní vyšperkovávání, přičemž i zápis se stále vyvíjí.

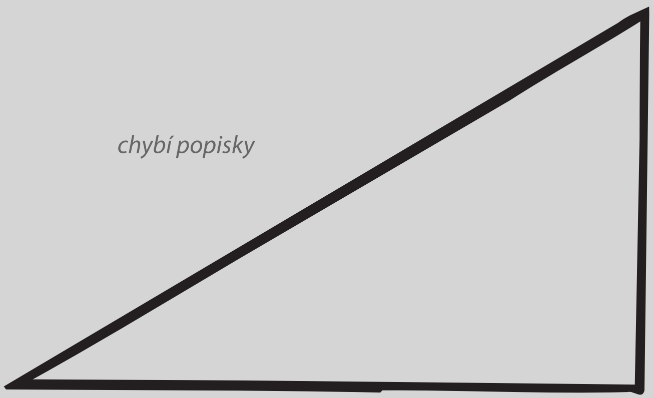
V této kapitole se podíváme na základní témata: goniometrické funkce, exponenciální funkce a logaritmy. Také vezmeme v potaz několik různých použití trigonometrie, starých i nových. Mnohá z těch starších jsou výpočetní techniky, které většinou zastaraly vlivem širokého rozšíření počítačů. Těžko dnes někdo používá logaritmy k tomu, aby například násobil. Nikdo již nepoužívá tabulky, vždyť počítače jsou schopny rychle vypočítat hodnoty funkcí s vysokou přesností. Ale když byly poprvé logaritmy vynalezeny, byly to číselné tabulky s jejich hodnotami, které je udělaly užitečnými, zejména v oblastech, jako je astronomie, kde jsou dlouhé a komplikované numerické výpočty nutností. A ti, kdo tabulky sestavovali, museli strávit roky – desetiletí – jejich životů vytvářením výpočtů. Lidstvo dluží hodně těmto zarputilým a specializovaným průkopníkům.

Původ trigonometrie

Základní problém určený trigonometrii je výpočet vlastností trojúhelníku – délek stran, velikostí úhlů – z jiných takových vlastností. Je mnohem jednodušší popsat ranou historii trigonometrie, vypočteme-li nejdříve hlavní funkce moderní trigonometrie, která je z většiny přepracováním témat z 18. století, která se ovšem datují až ke starým Řekům, ne-li dále do historie.

Trigonometrie – úvod

Trigonometrie spoléhá na mnoho speciálních funkcí, z nichž ty nejzákladnější jsou *sinus, kosinus* a *tangens*. Tyto funkce se aplikují na úhel tradičně představovaný řeckým písmenem θ (théta). Mohou být definovány v rámci pravoúhlého trojúhelníku, jehož tři strany *a, b, c* se nazývají *přilehlá odvěsna, protilehlá odvěsna* a *přepona*.



Potom:

sinus théta je	sin $\theta = b/c$,
kosinus théta je	cos $\theta = a/c$,
tangens théta je tg	tg $\theta = b/a$.

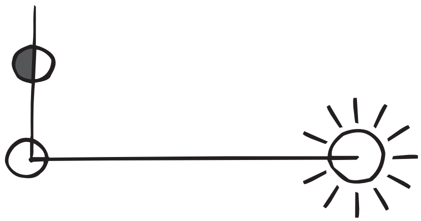
Takto vyjádřeno, hodnoty těchto tří funkcí jsou pro jakýkoliv daný úhel θ určeny geometrií trojúhelníku. (Ten samý úhel se může objevit v trojúhelnících různých rozměrů, ale geometrie podobných trojúhelníků zabezpečuje, že uvedené *poměry* jsou na rozměrech nezávislé.) Avšak jakmile byly jednou tyto funkce vypočítány a systematizovány do tabulek, je možné je použít pro řešení (výpočet všech stran a úhlů) trojúhelníku z hodnoty θ.

Tyto tři funkce spolu souvisejí v mnoha krásných vzorcích. Např. důsledkem Pythagorovy věty je

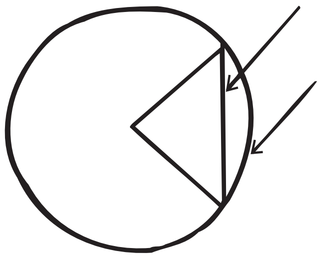
$$\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1.$$

Tento souhrn poskytuje rámec, ve kterém můžeme popsat myšlenky starověkých učenců, aniž bychom se zamotali do obskurních a nakonec zastaralých pojmů.

Trigonometrie nejspíše vznikla v rámci astronomie, v níž je relativně snadné změřit úhly, ale obtížné změřit obrovské vzdálenosti. Řecký astronom Aristarchos ve své knize *O rozměrech a vzdálenostech Slunce a Měsíce*, pocházející přibližně z roku 260 před n. l., odvozuje, že Slunce leží asi 18 až 20 krát dále od Země než Měsíc. (Správné číslo se blíží 400, ale Eudoxos a Feidiás se hádali o 10.) Jeho zdůvodnění bylo takové, že když je Měsíc ve své polovině, úhel mezi směry od pozorovatele ke Slunci a k Měsíci je zhruba 87° (v současných jednotkách). Použitím vlastností trojúhelníků odvodil (v současném značení), že sin 3° leží mezi $\frac{1}{18}$ a $\frac{1}{20}$, což vede k jeho odhadu poměru mezi vzdálenostmi ke Slunci a k Měsíci. Metoda byla správná, ale pozorování nepřesné; správný úhel je 89,8°.



Vztah mezi Sluncem, Měsícem a Zemí, když Měsíc je v první čtvrti.



chybí popisky

Oblouk a tětiva odpovídající úhlu θ.

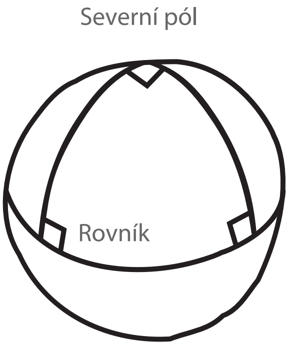
První trigonometrické tabulky dodal Hipparchos kolem roku 150 před n. l. Místo moderní funkce sinus použil úzce související hodnotu, které byla z geometrického pohledu stejně přirozená. Představte si kruh se dvěma poloměry svírajícími úhel θ. Body, ve kterých tyto úsečky protínají obvod kruhu, můžeme spojit úsečkou zvanou *tětiva*. Také o nich můžeme uvažovat jako o koncových bodech části obvodové kružnice, části zvané *oblouk*.

Hipparchos sestavil tabulku vztahující délky oblouků a tětiv k velikostem úhlů. Má-li kruh poloměr roven 1, potom délka oblouku se rovná θ, je-li tento úhel měřen v jednotkách známých jako *radiány*. Jednoduchá geometrie ukazuje, že délka tětivy je v dnešním značení 2 sin $\Theta/2$. Takže Hipparchovy výpočty jsou velmi úzce spjaté s tabulkou sinů, i když nebyly prezentovány stejnou formou.

Astronomie

Rané práce v trigonometrii byly pozoruhodně komplikovanější než většina z toho, co se dnes učí ve školách, a to opět díky potřebám astronomie (a později navigace). Přirozeným prostorem pro práci na ní nebyla rovina, ale koule. O nebeských tělesech můžeme uvažovat jako o ležících na imaginární kouli, *nebeské sféře*. Nebe fakticky vypadá jako vnitřek gigantické koule obklopující pozorovatele a nebeská tělesa jsou tak vzdálena, že se jeví, jako by na té kouli ležela.

Astronomické výpočty v důsledku odkazují na geometrii koule, ne na geometrii roviny. Požadavkem jsou tudíž nikoliv rovinná geometrie a trigonometrie, ale *sférická* geometrie a trigonometrie. Jedna z nejranějších knih v této oblasti je *Spherica* od Menelaa, přibližně z roku 100. Ukázková věta, která nemá analogii v euklidovské geometrii, je tato: Mají-li dva trojúhelníky shodné vnitřní úhly, potom jsou *shodné* – mají stejné rozměry a tvar.



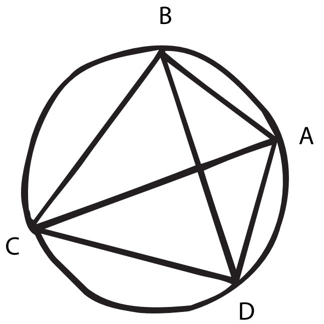
Vnitřní úhly sférického trojúhelníku nemají součet 180°.

(V euklidovské geometrii jsou podobné: Mají stejný tvar, ale mohou mít různé rozměry.) Ve sférické geometrii není součet vnitřních úhlů v trojúhelníku 180°, jako je tomu v rovině. Např. trojúhelník, jehož vrcholy leží na severním pólu a ve dvou bodech na rovníku, které určuje pravý úhel u prvního vrcholu, mají zřetelně tři pravé úhly, takže jejich součet je 270°. Zhruba řečeno: Čím větší je trojúhelník, tím větší je součet jeho vnitřních úhlů. Ve skutečnosti je tento součet mínus 180° přímo úměrná obsahu trojúhelníku.

Tyto příklady objasňují, že sférická geometrie má své vlastní charakteristiky a nové funkce. To samé platí pro sférickou trigonometrii, ale základní hodnoty jsou stále standardní goniometrické funkce. Mění se jen vzorce.

Ptolemaios

Zdaleka nejdůležitější trigonometrická kniha starověku je *Syntaxis Megale* od Ptolemaia z Alexandrie, která se datuje někam k roku 150. Více známá je jako *Almagest*, což je arabský termín pro „největší“. Zahrnuje trigonometrické tabulky, znovu uvedené v hodnotách tětiv, společně s metodami použitými pro jejich výpočet a katalogem umístění hvězd na nebeské sféře.



Tětivový čtyřúhelník a jeho úhlopříčky.

Zásadní vlastností výpočetní metody je Ptolemaiova věta, která tvrdí, že je-li *ABCD* tětivový čtyřúhelník (takový, kterému lze opsat kružnici), potom

$$AB \times CD \times BC \times DA = AC \times BD$$

(součet součinů délek protilehlých stran je roven součinu úhlopříček).

Současná interpretace tohoto faktu je pozoruhodná dvojice vzorců

$$\sin(\Theta + \varphi) = \sin\Theta\cos\varphi + \cos\Theta\sin\varphi$$

$$\cos(\Theta + \varphi) = \cos\Theta\cos\varphi - \sin\Theta\sin\varphi.$$

Hlavním důsledkem těchto vzorců je fakt, že znáte-li siny a kosiny dvou úhlů, můžete snadno zjistit sinus a kosinus součtu těchto úhlů. Takže když začneme např. se sin 1° a cos 1°, můžete odvodit sin 2° a cos 2° tím, že použijeme $\Theta = \varphi = 1°$. Potom můžete odvodit sin 3° a cos 3° tím, že položíme $\Theta = 1°$, $\varphi = 2°$ atd. Musíte vědět, jak začít, ale potom už vše, co potřebujete, je aritmetika – možná dost aritmetiky, ale nic komplikovanějšího.

Kde začít, je jednodušší, než by se mohlo zdát, potřebujeme jen aritmetiku a druhou odmocninu. Použitím zřejmého faktu, že $\Theta/2 + \Theta/2 = \Theta$, ukazuje Ptolemaiova věta, že

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

Když začneme od cos 90° = 0, můžeme opakovaně půlit úhel, až dostaneme siny a kosiny tak malých úhlů, jak si budeme přát. (Ptolemaios použil ¼°.) A poté můžete postupovat zpět nahoru po všech přirozených násobcích tohoto malého úhlu. Ve stručnosti: Začneme-li s několika obecnými, vhodně aplikovanými trigonometrickými vzorci a několika jednoduchými hodnotami pro specifické úhly, můžeme zjistit hodnoty v podstatě pro jakýkoliv úhel, který si budeme přát. Byl to neobyčejný husarský kousek, který astronomy dostal do hry na dobrých tisíc let.

Poslední pozoruhodnou vlastností *Almagestu* je, jak si poradil s oběžnými dráhami planet. Kdokoliv, kdo pravidelně pozoruje noční oblohu, rychle objeví, že planety putují po obloze, která má pozadí pevně umístěných hvězd, a že cesty, kterými putují, jsou poměrně komplikované, někdy se vracejí, někdy se pohybují v prodlužujících se smyčkách.

Eudoxos ve své odpovědi Platónovi našel způsob, jak tyto komplexní pohyby znázornit pomocí otočných koulí připevněných na jiné koule. Tato myšlenka byla zjednodušena Apollóniem a Hipparchem k použití *epicyklů* – kruhů, jejichž středy se pohybují po ostatních kruzích atd. Ptolemaios vypracoval systém epicyklů tak, že poskytoval velmi přesný model planetárních pohybů.

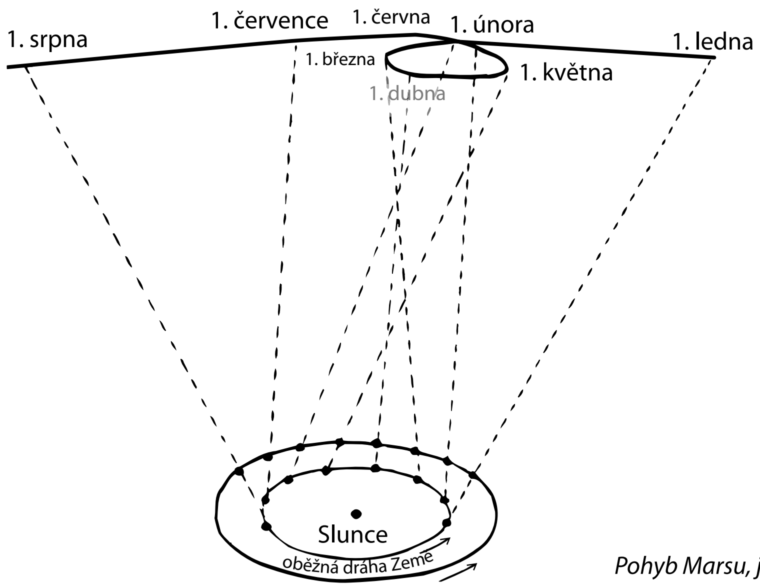
Raná trigonometrie

Pojmy rané trigonometrie se objevují ve spisech indických matematiků a astronomů: ve Varahamihirově *Pancha Siddhanta* z roku 500, v Brahmaguptově *Brahma Sputa Siddhanta* z roku 628 a v podrobnější *Siddhanta Siromani* od Bhaskarachyryi z roku 1150.

Pohyb Marsu, jak jej vidíme ze Země

1. srpna; 1. července; 1. června; 1. května; 1. dubna; 1. března; 1. února; 1. ledna

Slunce; oběžná dráha Země; oběžná dráha Marsu



Pohyb Marsu, jak jej vidíme ze Země

Indičtí matematici obecně používali pojem „půltětiva", *jiva-ardha*, což je vlastně moderní sinus. Varahamihira vypočítal tuto funkci pro 24 celočíselných násobků od úhlu 3°45' až po úhel 90°. Kolem roku 600 podal Bhaskara v knize *Maha Bhaskariya* použitelný přibližný vzorec pro sinus ostrého úhlu, který připisoval Aryabhatovi. Tito autoři odvodili mnoho základních trigonometrických vzorců.

Arabský matematik Nasir Eddin ve svém *Pojednání o čtyřúhelníku* kombinoval rovinnou a sférickou geometrii v jednotném vývoji a předložil několik základních vzorců pro sférické trojúhelníky. Pojímal téma spíše matematicky než jako část astronomie. Jeho práce ovšem zůstaly na západě nepovšimnuty až do roku 1450.

Díky svému svázání s astronomií byla většina trigonometrie až do roku 1450 sférická. Zejména průzkum – dnes hlavní oblast použití trigonometrie – byl prováděn za použití empirických metod stanovených Římany. Ale uprostřed 15. století začala rovinná trigonometrie žít svým vlastním životem, zpočátku v severoněmecké hanze (obchodním spolku). Hanza kontrolovala většinu obchodu, a byla tudíž bohatá a vlivná. A spolu s vylepšením časomíry a praktického využití astronomických pozorování také potřebovala vylepšení navigačních metod.

Klíčovou postavou byl Johannes Müller, obvykle znám jako Regiomontanus. Byl žákem George Peuerbacha, který začal pracovat na nové korigované verzi *Almagestu*. V roce 1471 díky financování jeho patronem Bernardem Waltherem vypočítal nové tabulky sinu a tangentu.

Ostatní prominentní matematici 15. a 16. století vypočítávali své vlastní trigonometrické tabulky, často s extrémní přesností. George Joachim Rhaeticus vypočítal sinus kruhu s poloměrem 10^{15} – ve skutečnosti byly tabulky přesné na 15 desetinných míst, ale násobené číslem 10^{15} byly ve tvaru celých čísel – pro velikosti úhlu po jednotlivých sekundách v obloukové míře. Pravidlo pro sinus sférických trojúhelníků

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

a *kosinovou větu*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

uvedl také ve své knize *De Triangulis*, napsané v letech 1462–1463, ovšem nepublikované až do roku 1533. V pravidle jsou A, B, C úhly trojúhelníku a a, b, c jsou jeho strany.

Viète psal o trigonometrii také zeširoka, jeho první kniha o tématu byla *Canon Mathematicus* z roku 1579. Sesbíral a systematizoval v ní rozličné metody pro řešení trojúhelníků, tzn. pro výpočet jeho stran a úhlů z určité podmnožiny informací. Vymyslel nové trigonometrické identity, mezi nimi zajímavé výrazy pro sinus a kosinus celočíselných násobků Θ v oblasti sinu a kosinu Θ.

Logaritmy

Druhým tématem této kapitoly je jedna z nejdůležitějších funkcí matematiky: logaritmus, $\log x$. Nejprve byl logaritmus důležitý, protože splňoval rovnici

$$\log xy = \log x + \log y,$$

a mohl být proto použit pro převod násobení (které je těžkopádné) do sčítání (které je jednodušší a rychlejší). Pro vynásobení dvou čísel x a y je třeba nejprve najít jejich logaritmy, sečíst je, a poté najít číslo, jehož logaritmus je výsledkem (*antilogaritmus* výsledku). To je součin xy.

Jakmile jednou matematici vypočítali tabulku logaritmů, mohl ji použít kdokoliv, kdo rozuměl metodě. Od 17. století až do poloviny století 20. prakticky všechny výpočty, zejména ty astronomické, používaly logaritmy. Až od 60. let 20. století rozvoj kalkulaček a počítačů učinil logaritmy pro potřeby výpočtů zastaralými. Ale pojem zůstal v matematice stále živý, protože logaritmy hrají podstatnou roli v mnoha částech matematiky včetně matematické analýzy a komplexní analýzy. Také množství fyzikálních a biologických procesů zahrnuje logaritmické chování.

V současnosti o logaritmech uvažujeme jako o inverzních funkcích k exponenciálním funkcím. Za použití základu 10, což je přirozená volba pro náš desítkový zápis, říkáme, že x je logaritmus y, jestliže $y = 10^x$. Např. jelikož 10^3 je 1 000, dekadický logaritmus 1 000 (se základem 10) je 3. Základní vlastnost logaritmů plyne z pravidla

$$10^{a+b} = 10^{a} + 10^{b}.$$

Aby ovšem logaritmy byly užitečné, musíme být schopni najít vhodné x pro jakékoliv kladné reálné y. Když budeme následovat Newtona a ostatní matematiky jeho období, hlavní myšlenka spočívá v tom, že jakákoliv racionální mocnina $10^{p/q}$ může být definována jako q-tá odmocnina $10p$. Protože jakékoliv reálné číslo x můžeme aproximovat s libovolnou přesností racionálním číslem p/q, můžeme aproximovat $10x$ číslem $10p/q$. To není ten nejefektivnější způsob, jak *vypočítat* logaritmus, ale je to nejjednodušší způsob, jak dokázat, že existuje.

Objev logaritmů historicky nebyl tak přímý. Začalo to ve Skotsku Johnem Napierem, baronem z Merchistonu. Celoživotně se zajímal o efektivní výpočetní metody a vynalezl *Napierovy hůlky* (nebo *Napierovy kostky*), sadu značených hůlek, které se daly použít pro rychlé a spolehlivé násobení simulací metody písemného násobení. Kolem roku 1594 začal pracovat na více teoretické metodě a jeho zápisky nám odhalují, že mu trvalo 20 let, než ji dovedl k dokonalosti a publikoval ji. Je pravděpodobné, že začal geometrickou posloupností, řadou čísel, ve které každé z nich je násobkem předchozího a nějakého fixního čísla – např. mocniny 2.

V tomto případě si matematici již dávno všimli, že sčítání exponentů je s násobením mocnin ekvivalentní. To bylo příjemné, jakmile jste chtěli vynásobit dvě celočíselné mocniny dvou nebo deseti. Ale mezi těmito dvěma čísly jsou velké mezery a mocniny 2 nebo 10 nevypadaly příliš použitelně, když přišlo dejme tomu na příklad 57,681 · 29,443.

Napierovy logaritmy

Zatímco se dobrý baron pokoušel nějak vyplnit prostor mezi geometrickými posloupnostmi, James Craig, lékař krále Jakuba IV. Skotského, řekl Napierovi o objevu, který byl v Dánsku široce rozšířen pod nemotorným názvem *prosthapheiresis*. Odkazoval na jakýkoliv proces, který převáděl součin v součet. Hlavní metoda v praktickém použití byla založena na vzorci objeveném Viètou:

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{2}.$$

Máte-li tabulky sinu a kosinu, můžete tento vzorec použít pro převod násobení na sčítání. Není to čisté, ale stále je to rychlejší než přímé násobení čísel.

Napier se této myšlenky chytil a našel významné vylepšení. Vytvořil geometrickou řadu s běžným poměrem, velmi blízkým 1. To znamená, že místo mocnin 2 nebo 10 byste měli použít mocniny dejme tomu 1,0000000001. Postupné mocniny takových čísel jsou velmi blízko u sebe, což nás zbavuje oněch otravných mezer. Z nějakého důvodu použil Napier poměr o něco

Rovinná trigonometrie

Dnešní trigonometrie se podává nejdříve v rovinné formě, kde je geometrie jednodušší a základní principy jsou snadněji uchopitelné. (Je zvláštní, jak často jsou nové matematické myšlenky zprvu vymyšleny v komplikovaných pojmech a že jednodušší základy vyjdou najevo až později.) Stojí za to si na tomto místě rychle představit sinovou a kosinovou větu pro rovinné trojúhelníky. Uvažujme rovinný trojúhelník s úhly α, β, γ a stranami a, b, c.

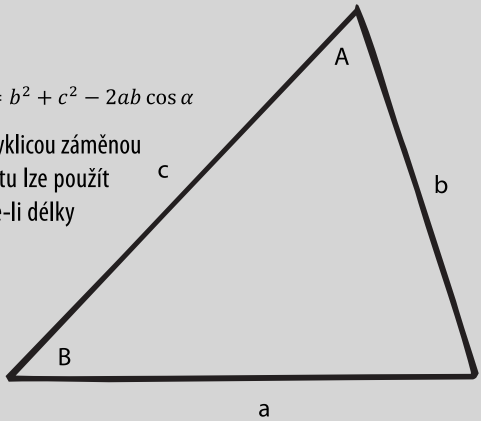
Sinová věta má potom tvar

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

a kosinová věta zní

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha$$

s obdobnými rovnicemi vytvořenými cyklicou záměnou zahrnujícími zbylé úhly. Kosinovou větu lze použít pro nalezení úhlů trojúhelníku, známe-li délky jeho stran.



Strany a úhly trojúhelníku

menší než 1, jmenovitě 0,9999999. Jeho geometrická řada se tak postupně pohybovala *zpět* od velkých čísel k menším. Začal ve skutečnosti číslem 10 000 000 a poté je násobil postupnými mocninami 0,9999999. Použijeme-li Naplog x pro Napierův logaritmus x, má tu zvláštní vlastnost, že

$$Naplog\ 10\,000\,000 = 0$$

$$Naplog\ 9\,999\,999 = 1$$

atd. Napierův logaritmus, Naplog x, splňuje rovnici

$$Naplog(10^7 xy) = Naplog(x) + Naplog(y).$$

Lze jej použít pro výpočty, protože je jednoduché násobit nebo dělit mocninami 10, ale postrádá to eleganci. Je to nicméně mnohem lepší, než Viètův trigonometrický vzorec.

Dekadické logaritmy

Další vylepšení přišlo s Henry Briggsem, prvním sevillským profesorem geometrie na Oxfordově univerzitě, když navštívil Napiera. Briggs navrhl vyměnit Napierův koncept jednodušším dekadickým logaritmem, $L = \log_{10} x$, který splňuje podmínku

$$x = 10^L.$$

Nyní

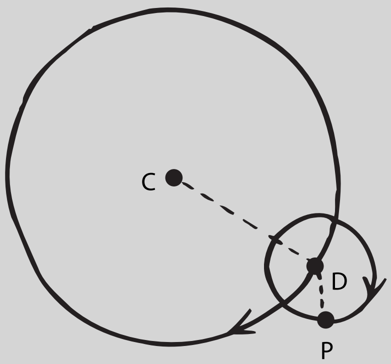
$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$$

– a vše je snadné. Abychom našli xy, sečteme logaritmy x a y a poté nalezneme antilogaritmus výsledku.

Ještě než se tyto myšlenky mohly rozšířit, Napier zemřel; byl rok 1617 a jeho popis počítacích kostek, *Rhabdologia*, byl právě publikován. Jeho originální metoda pro výpočet logaritmů, *Mirifici Logarithmorum Canonis*

Co jim trigonometrie umožnila

Ptolemaiův *Almagest* stanovil základ všech zkoumání planetárních pohybů ještě před Keplerovým objevem, že oběžné dráhy jsou eliptické. Pozorování pohybu planet je komplikováno relativním pohybem vůči Zemi, který v Ptolemaiových časech nebyl rozpoznán. I kdyby se planety pohybovaly po kružnicích konstantní rychlostí, zemský pohyb kolem Slunce by ve skutečnosti potřeboval kombinaci dvou různých kruhových pohybů a přesný model by musel být výrazně komplikovanější než ten Ptolemaiův. Ptolemaiovo schéma epicyklů kombinuje kruhové pohyby tím, že nechává střed jedné kružnice obíhat po jiné kružnici. Tato kružnice může sama obíhat okolo třetí kružnice atd. Geometrie konstantního kruhového pohybu přirozeně zahrnuje goniometrické funkce, které pozdější astronomové použili pro výpočet oběžných drah.



Epicykl. Planeta P obíhá okolo bodu D, který obíhá okolo bodu C.

Constructio, se objevila o dva roky později. Briggs se ujal úkolu vypočítat tabulky tzv. Briggsových logaritmů. Začal tím, že $\log_{10} 10 = 1$, a pokračoval následujícími druhými odmocninami. V roce 1617 publikoval *Logarithmorum Chilias Prima*, logaritmy celých čísel od 1 do 1 000, uvedené na 14 desetinných míst. Jeho *Arithmetic Logarithmica* z roku 1624 zahrnovala v tabulkách dekadické logaritmy čísel od 1 do 20 000 a od 90 000 do 100 000, také na 14 desetinných míst.

Myšlenka se začala lavinovitě šířit a John Speidell vypracoval logaritmy goniometrických funkcí (jako je log sin x) a vydal je jako *New Logarithmes* v roce 1619. Švýcarský hodinář Jobst Bürgi vydal roku 1620 svou vlastní práci o logaritmech a možná, že základní myšlenku měl již v roce 1588, před Napierem. Ale historický vývoj matematiky závisí na tom, kdy lidé svá díla publikují – v původním smyslu slova je učiní veřejnými –, neboť myšlenky, jež zůstávají v soukromí, nemají na nikoho jiného vliv. Takže zásluhy, pravděpodobně správně, musejí patřit těm lidem, kteří jako první nechali své myšlenky vytisknout, nebo je alespoň uvedli do širokého oběhu, např. pomocí dopisů. (Výjimkou jsou lidé, kteří nechají vytisknout myšlenky *jiných* bez přiznání zásluh. To je samozřejmě nepřijatelné.)

Číslo e

S Napierovou verzí logaritmu je spojeno jedno z nejdůležitějších čísel v matematice, nyní označované jako *e*. Jeho hodnota je zhruba 2,7128. To se objeví, když se pokusíme sestavit logaritmus tak, že začneme geometrickou řadou, jejíž kvocient je jen těsně větší než 1. To vede k výrazu $(1+1/n)^n$, kde n je velmi vysoké celé číslo, a čím je větší, tím blíže se hodnota výrazu blíží tomuto speciálnímu číslu, jež značíme jako *e*.

Tento postup naznačuje, že existuje přirozený základ logaritmů, který není ani 10, ani 2, ale *e*. *Přirozený logaritmus x* je jakékoliv číslo y splňující podmínku $x = e^y$. V dnešní matematice je přirozený logaritmus zapisován jako $y = \ln x$. Někdy se základ e explicitně uvádí, jako $y = \log_e x$, ale tento zápis je omezen hlavně na školskou matematiku, protože v pokročilé matematice a vědě je jediným logaritmem, který má význam, právě logaritmus přirozený. Dekadické logaritmy jsou nejlepší pro výpočty v desetinném zápisu, ale přirozené logaritmy jsou matematicky zásadnější.

Co trigonometrie umožňuje nám

Trigonometrie je podstatná pro průzkum čehokoliv od stavebních pozemků po kontinenty. Je relativně snadné změřit úhly s vysokou přesností, ale těžší je měřit vzdálenosti, zejména v těžkém terénu. Průzkumníci proto začínají pečlivým změřením jedné délky, *základny*, což je vzdálenost mezi dvěma specifickými místy. Poté vytvoří trojúhelník a využijí změřené úhly a trigonometrii, aby vypočítali strany tohoto trojúhelníka. Tímto způsobem je možné získat přesnou mapu celého uvažovaného území. Tento proces je znám jako triangulace. Pro kontrolu jeho přesnosti je možné provést druhé měření vzdálenosti, jakmile je triangulace kompletní.

Obrázek ukazuje jeden z raných příkladů, známý průzkum, podniknutý v roce 1751 v jižní Africe známým astronomem abbém Nicolasem Louisem de Lacaill. Jeho hlavním cílem, bylo katalogizovat hvězdy jižní noční oblohy, ale aby to mohl udělat přesně, musel nejprve změřit oblouk vhodné zeměpisné šířky. Pro toto měření použil triangulaci na severu Kapského Města.

Jeho výsledky napovídají, že zakřivení Země je menší v jižních zeměpisných šířkách než v severních – překvapivé to zjištění, které bylo později ověřeno. Země je jemně deformovaná do tvaru hrušky. Jeho katalogizační aktivity byly tak úspěšné, že pojmenoval 15 z 88 dnes rozlišovaných souhvězdí a pozoroval více než 10 000 hvězd s pomocí malého refraktoru.

Lacaillova triangulace Jižní Afriky

Výraz e^x je jeden z nejdůležitějších v celé matematice. Číslo e je jedno z oněch zvláštních čísel, která se v matematice objevují a mají obrovský význam. Jiné takové číslo je π. Tato dvě čísla jsou vrcholkem ledovce, existuje jich totiž mnohem více. Jsou také pravděpodobně nejdůležitějšími čísly mezi těmi speciálními, protože se objevují napříč celou matematickou krajinou.

Kde bychom bez nich byli?

Bylo by obtížné podcenit dluh, který u nás mají oni jednotlivci, kteří viděli dále než ostatní a vynalezli logaritmy a trigonometrii a kteří strávili roky počítáním prvních tabulek hodnot. Jejich snaha vydláždila cestu ke kvantitativnímu vědeckému chápání přirozeného světa a umožnila celosvětové cestování a obchod vylepšením navigace a tvorby map. Základní techniky průzkumu spoléhaly na trigonometrické výpočty. I dnes, kdy vybavení pro průzkum používá lasery a kdy výpočty jsou prováděny zabudovanými speciální čipy, jsou postup závislé na laseru a čipu přímými následovníky trigonometrie, která zaujala matematiky starověké Indie a Arábie.

Logaritmy umožnily vědcům provádět násobení rychle a přesně. Dvacet let snahy o knihu tabulek jednoho matematika ušetřilo tisíce let lidské práce v pozdější době. Vědecké analýzy za použití pera a papíru by jinak byly velmi časově náročné. Věda by se zkrátka nikdy bez takovýchto metod nemohla rozvíjet. Přínos tak jednoduché myšlenky je nevyčíslitelný.